Todennäköisyyslaskennan paradoksit

Tommi Ranta

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA
MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA FAKULTETEN
FACULTY OF SCIENCE

Tiedekunta – Fakultet – Faculty		Koulutusohjelma – Utbildningsprogram – Degree programme
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta		Matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan maisteriohjelma
Tekijä – Författare – Author		
Tommi Ranta		
Työn nimi – Arbetets titel – Title		
Todennäköisyyslaskennan paradoksit		
Työn laji – Arbetets art – Level	Aika – Datum – Month and year	Sivumäärä – Sidoantal – Number of pages
Maisterintutkielma	04/2021	34

Tiivistelmä – Referat – Abstract

Tämän maisterintutkielman tavoitteena on tutustuttaa lukija todennäköisyyslaskennan paradokseihin. Tutkielman alussa kerrotaan yleisesti todennäköisyyslaskennan paradokseista, jonka jälkeen esitetään neljä klassista todennäköisyyslaskennan paradoksia ratkaisuineen. Tutkielman lopussa pohditaan, miten todennäköisyyslaskennan paradoksit tukevat matematiikan opetusta sekä suomalaisten opetussuunnitelmien (peruskoulu ja lukio) että aihetta koskevien tieteellisten julkaisujen näkökulmasta.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords
todennäköisyyslaskenta, paradoksi, matematiikan opetus
Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited
Helsingin yliopiston kirjasto
Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information
-

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Tämän maisterintutkielman tarkoituksena on kertoa yleisesti todennäköisyyslaskennan paradokseista, sekä esitellä neljä todennäköisyyslaskennan paradoksia ratkaisuineen. Esittelemäni todennäköisyyslaskennan paradoksit ovat: Monty Hallin ongelma, Bertrandin paradoksi, syntymäpäiväongelma ja Pietarin paradoksi. Esittelemistäni paradokseista saatetaan tuntea useampia eri versioita, mutta esittelen ne niissä muodoissa, joissa ne on löytämässäni lähdekirjallisuudessa esitetty. Paradoksien ratkaiseminen ja ymmärtäminen vaativat todennäköisyyslaskennan peruskäsitteiden osaamista, joten ratkaisujen ymmärtämisen kannalta hyödyllisiä kursseja ovat Todennkäköisyyslaskenta I ja II. Bertrandin paradoksin ymmärtämisen kannalta hyödyllisiä kursseja ovat myös Geometria I ja II.

Aloitan tutkielmani esittelemällä tutkielman kannalta oleelliset todennäköisyyslaskennan ja geometrian käsitteet. Tämän jälkeen kerron hieman yleisesti todennäköisyyslaskennan paradokseista, jonka jälkeen siirryn esittelemään edellä mainitut neljä paradoksia ratkaisuineen. Lopuksi käyn läpi, kuinka todennäköisyyslaskennan paradokseja voisi hyödyntää peruskoulun ja lukion matematiikan opetuksessa sekä tutustun muutamaan todennäköisyyslaskennan opetuksen tutkimuksen tieteelliseen julkaisuun ja pohdin, mitä julkaisuissa esitettyjä havaintoja ja tutkimustuloksia paradoksit voisivat tukea.

Luku 2

Tarvittavia määritelmiä ja käsitteitä

Määritelmien lähteenä käytetty Pekka Tuomisen ja Pekka Norlamon kirjaa Todennäköisyyslaskenta vuodelta 1988, sekä Petri Koistisen Todennäköisyyslaskenta II -kurssin kurssimonistetta vuodelta 2013. Ensin käydään läpi yleisen todennäköisyyden määritelmät ja sen jälkeen klassisen todennäköisyyden määritelmät.

Yleinen todennäköisyys Yleisessä todennäköisyydessä esitetään matemaattinen malli, jota kutsutaan todennäköisyysavaruudeksi. Todennäköisyysavaruuden tulee olla tarpeeksi yleinen, jotta se soveltuu erilaisten satunnaisten ilmiöiden matemaattisen käsittelyn perustaksi.

Ensin määritellään otosavaruus Ω, joka muodostuu alkeistapauksista eli satunnaiskokeen kaikista tulosmahdollisuuksista.

Seuraavaksi määritellään kokoelma $\mathcal{F}$ Ω:n osajoukkoja, joita kutsutaan tapahtumiksi. Tapahtuman $A \in \mathcal{F}$ tapahtuminen tarkoittaa sitä, että kokeen tulos ω sisältyy joukkoon A eli $\omega \in A$.

Määritelmä 2.1. (Sigma-algebra) Kokoelma $\mathcal{F}$ perusjoukon Ω osajoukkoja on sigma-algebra (kirjoitetaan usein σ-algebra), jos

(a) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$,

(c) $A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, ...) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Määritelmä 2.2. Kuvaus $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ on todennäköisyys, jos

(a) $P(A) \geq 0$ kaikilla $A \in \mathcal{F}$,

(b) $P(\Omega) = 1$,

(c) jos $A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, ...)$ ja $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$,
niin $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Määritelmä 2.3. (Todennäköisyysavaruus) kolmikko $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on *todennäköisyysavaruus*, jos Ω on epätyhjä joukko, $\mathcal{F}$ on σ-algebra ja $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ on todennäköisyys.

Todennäköisyydellä on mm. seuraavat ominaisuudet.

Lause 2.4. *Olkoon* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *todennäköisyysavaruus. Tällöin*

(a) $P(\emptyset) = 0$,

(b) $P(A^c) = 1 - P(A)$ *kaikilla* $A \in \mathcal{F}$,

(c) $A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,

(d) $0 \leq P(A) \leq 1$ *kaikilla* $A \in \mathcal{F}$,

(e) $A, B \in \mathcal{F},\ A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$,

(f) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Määritelmä 2.5. (Diskreetti satunnaismuuttuja) Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyysavaruus ja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ kuvaus. X on *diskreetti satunnaismuuttuja* todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jos X:n arvojoukko $X(\Omega)$ on (enintään) numeroituva joukko $\{x_1, x_2, ...\}$ ja $\{X = x_k\} \in \mathcal{F}$ kaikilla k.

Määritelmä 2.6. (Diskreetin satunnaismuuttujan pistetodennäköisyysfunktio) Satunnaismuuttujan X pistetodennäköisyysfunktio on funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle

$$f(x) = P(X = x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lause 2.7. *(Pistetodennäköisyysfunktion ominaisuuksia) Pistetodennäköisyysfunktiolla on seuraavat ominaisuudet:*

(a) $f(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$,

(b) $f(x) > 0 \Rightarrow x$ *kuuluu* X*:n numeroituvaan arvojoukkoon* $\{x_1, x_2, ...\}$,

(c) $\sum_k f(x_k) = 1$.

Määritelmä 2.8. (Diskreetin satunnaismuutujan odotusarvo) Jos X on diskreetti satunnaismuuttuja, jonka arvojoukko on $S = \{x_1, x_2...\}$ ja pistetodennäköisyysfunktio on f, niin sen odotusarvo on reaaliluku

$$EX = E(X) = \sum_i^n x_i f(x_i) = \sum_x x f(x).$$

Määritelmä 2.9. (Tapahtumien riippumattomuus) Tapahtumat A ja B ovat toisistaan riippumattomia, jos

$$P(A \text{ ja } B) = P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Klassinen todennäköisyys Ajatellaan, että satunnaiskokeen tulos on mikä tahansa tapauksista $w_1, ..., w_n$ ja jokainen tapaus on yhtä mahdollinen eli yhtä todennäköinen. Merkitään alkeistapausten joukkoa eli otosavaruutta Ω:lla,

$$\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_n\}.$$

Ω:sta käytetään myös nimitystä perusjoukko.

Klassisessa todennäköisyydessä todennäköisyysavaruuden $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ajatellaan olevan äärellinen. Tällöin kokoelmaksi $\mathcal{F}$ valitaan , mikäli ei mainita toisin, kaikkien Ω:n osajoukkojen joukko

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

Määritelmä 2.10. (Tapahtuman klassinen todennäköisyys) Tapahtuman $A \subset \Omega$ todennäköisyys $P(A)$ on reaaliluku väliltä $[0, 1]$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

missä $n(A)$ on ”osajoukon A alkioiden lukumäärä” eli ”A:lle suotuisten alkeistapausten lukumäärä” ja $n(\Omega)$ on ”kaikkien alkeistapausten lukumäärä”.

Lause 2.11. *(Komplementin todennäköisyys) Tapahtuman A vastatapahtuman, eli komplementin, A^c todennäköisyys on*

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Lause 2.12. *Kun perusjoukko Ω on äärellinen, niin alkeistapahtumien $w \in \Omega$ todennäköisyydet ovat siten symmetrisiä, että niillä on kaikilla sama todennäköisyys:*

$$P(w) = \frac{1}{n(\Omega)}, \quad \textit{kaikilla } w \in \Omega.$$

Lause 2.13. *Bayesin kaava*

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}.$$

Kaavassa

- $P(B|A)$ *on todennäköisyys* B *ehdolla* A,
- $P(A|B)$ *on todennäköisyys* A *ehdolla* B,
- $P(B)$ *on tapahtuman* B *todennäköisyys riippumatta* A*:sta,*
- $P(A)$ *on tapahtuman* A *todennköisyys riippumatta* B*:stä.*

Geometrinen todennäköisyys *Geometrisessä todennäköisyydessä on ideana laskea todennäköisyys jollekin geometrisen kuvion osan tapahtumalle jonkin geometrisen kappaleen sisällä.*

Määritelmä 2.14. Geometrinen todennäköisyys. Tapahtuman A geometrinen todennäköisyys saadaan geometristen mittojen suhteena kaavasta

$$P(A) = \frac{\ell(A)}{\ell},$$

jossa $\ell(A)$ on tapahtumaa A vastaava geometrinen mitta ja ℓ on koko kuvion mitta eli perusjoukon mitta. Geometrinen mitta on yleensä pituus, pinta-ala tai tilavuus.

Luku 3

Todennäköisyyslaskennan paradoksit

Paradoksiksi kutsutaan yleisesti väitettä tai olettamaa, joka aiheuttaa ristiriidan. Sana paradoksi muodostuu kahdesta kreikan kielen sanasta, jotka tarkoittavat ”vasten” ja ”näkemystä.” Paradokseissa päädytään usein ongelmalliseen tilanteeseen, jossa ensin ajatellaan asian olevan tietyllä tavalla, mutta lopulta todetaankin asian olevan jopa täysin vastoin alkuperäistä olettamaa.

Matemaattisille todennäköisyyslaskennan paradokseille on varsin tyypillistä se, että paradoksille on useita erilaisia variaatioita ja ratkaisuja. Paradoksien variaatiot saattavat poiketa alkuperäisestä esitystavasta huomattavasti, mutta pohjautuvat kuitenkin silti alkuperäiseen ja yleisesti tunnetumpaan esitystapaan. Paradoksien ratkaisuille on jossain määrin tyypillistä se, että paradoksin sääntöjä, määritelmiä tai aksioomia muokataan, jotta paradoksille saadaan ratkaisu. Tässä tutkielmassa esitetään lähes jokaiselle paradoksille useampi ratkaisu, joillekin myös useampi esitystapa.

Luku 4

Monty Hallin ongelma

4.1 Esittely

Monty Hallin ongelmassa ajatellaan tilanne, jossa visailun kilpailijalla on valittavanaan kolme ovea. Kahden oven takana odottaa vuohi ja yhden oven takana odottaa uudenkarhea urheiluauto. Kilpailijalla ei ole tietoa siitä, minkä oven takana mitäkin on.

Kilpailijan tehtävänä on ensin valita kolmesta ovesta yksi. Tämän jälkeen kahdesta jäljelle jääneestä ovesta, joihin kilpailijan valinta ei kohdistunut, visailun juontaja avaaa toisen, jonka takana on jokaisella kerralla vuohi. Tämän jälkeen kilpailija saa valita, että valitseeko hän ensin valitsemansa oven vai vaihtaako hän ovivalintansa toiseen avaamattomaan oveen. Pelaajan tehtyä päätöksensä avataan hänen lopulta valitsemansa ovi. Mikäli oven takaa paljastuu urheiluauto, voittaa kilpailija auton itselleen. Mikäli oven takaa paljastuu vuohi, kilpailija ei voita mitään.

Monty Hallin ongelma kohdistuu tilanteeseen, jossa kilpailijalla on mahdollisuus vaihtaa ovea. Onko alkuperäisessä ovivalinnassa pysyminen kilpailijalle edullisempaa kuin oven vaihtaminen, vaiko ei? Ongelmasta tekee paradoksin se, että useimmiten paradoksin ratkaisemista yrittävä ajattelee, ettei vaihtaminen vaikuta todennäköisyyteen tai vaihtoehtoisesti pienentää todennäköisyyttä voittaa urheiluauto. Näin ei kuitenkaan ole, ja sen näyttävät seuraavaksi esitettävät ratkaisut.

4.2 Ratkaisut

Monty Hallin ongelman ratkaisemiseksi voidaan käyttää useaa eri menetelmää. Esittelen niistä kaksi. Ensimmäisessä ratkaisussa käytän klassisen todennäköisyyden keinoja ja toisessa ratkaisussa käytän Bayesin kaavaa.

Ratkaisu 1. Aloitetaan ratkaisu listaamalla taulukkoon kaikki mahdolliset tapaukset, joissa pelaaja joko voittaa tai häviää. Taulukossa pelaaja valitsee ensiksi oven 1 ja tämän jälkeen joko pysyy valinnassaan tai vaihtaa oveen 2 tai 3.

	Ovi 1	Ovi 2	Ovi 3	Pelin tulos
Peli 1	Urheiluauto	Vuohi	Vuohi	Voitto ilman vaihtoa
Peli 2	Vuohi	Urheiluauto	Vuohi	Häviö ilman vaihtoa
Peli 3	Vuohi	Vuohi	Urheiluauto	Häviö ilman vaihtoa
Peli 4	Urheiluauto	Vuohi	Vuohi	Häviö vaihdolla
Peli 5	Vuohi	Urheiluauto	Vuohi	Voitto vaihdolla
Peli 6	Vuohi	Vuohi	Urheiluauto	Voitto vaihdolla

Taulukko 4.1: Bertrandin paradoksin mahdolliset tapaukset.

Taulukon perusteella huomaamme, että pelaajalle voi tapahtua pelissä kaiken kaikkiaan kuusi erilasita tapausta. Kolmessa tapauksessa pelaaja vaihtaa ovea ja kolmessa tapauksessa pelaaja pysyy alkuperäisessä ovivalinnassaan. Vaihtaessa ovivalintaansa pelaaja voittaa $\frac{2}{3}$ tapauksista ja häviää $\frac{1}{3}$ tapauksista. Sen sijaan pelaajan pysytessä todennäköisyydet ovat päinvastoin eli pysyessään valinnassaan pelaaja häviää $\frac{2}{3}$ tapauksista ja voittaa vain $\frac{1}{3}$ tapauksista. Voimme myös todeta, että vaihtamalla pelaaja häivää ainoastaan silloin, kun hän sattuu valitsemaan alussa oven, jossa urheiluauto on. Täten vallitsevien todennäköisyyksien nojalla vaihtaminen on järkevämpi pelistrategia kuin alkuperäisessä ovivalinnassa pysyminen.

Ratkaisu 2. Käytetään Bayesin kaavaa

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}.$$

Lasketaan aluksi todennäköisyys sille, että pelaajan valitessa oven 1 juontaja avaa oven 3. Urheiluauto on $\frac{1}{3}$ todennäköisyydellä valitun oven takana. Mikäli pelaaja on valinnut oven 1 ja oven 3 takana on urheiluato, valitaan ovi 3 todennäköisyydellä 0. Mikäli taas oven 2 takana on urheiluauto, avataan ovi 3 varmasti eli todennäköisyydellä 1. Tilanteessa, jossa pelaajan ensin valitseman oven eli oven 1 takana on urheiluauto, avataan ovi 3 todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$. Merkitään tätä tapahtumaa seuraavasti.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\text{"Pelaaja valitsee oven 1, juontaja avaa oven 3"}) \\ &= \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = {}^{2)}\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}^{(3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tiedetään, että todennäköisyys sille, että yksittäisen oven takana on urheiluauto, on $\frac{1}{3}$. Merkitään tätä tapahtumaa oven 1 tapauksessa seuraavasti:

$$P(B) = P(\text{"Oven 1 takana on urheiluauto"}) = \frac{1}{3}.$$

Lasketaan vielä ehdollinen todennäköisyys sille, että pelaaja on valinnut oven, jonka takana on urheiluauto ja juontaja valitsee kahdesta jäljelle jääneestä ovesta sattumanvaraisesti toisen. Tapahtuma B on siis tapahtunut, joten jäljelle jää todennäköisyys $\frac{1}{2}$ valita toinen ovista.

$$P(A|B) = P(\text{"Oven 1 takana on urheiluauto ja juontaja valitsee sattumanvaraisesti"}) = \frac{1}{2}.$$

Lopuksi sijoitamme lasketut todennäköisyydet Bayesin kaavaan

$$P(B|A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}.$$

Laskimme Bayesin kaavan avulla siis todennäköisyyden sille, että pelaaja on jo valinnut oven 1, jonka takana urheiluauto on ja juontaja on avannut oven 3. Täten todennäköisyys sille, että urheiluauto on oven 2 takana on tässä tapauksessa

$$P(\text{"Oven 2 takana on urheiluauto"}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Täten alkuperäisen valinnan vaihtaminen on siis kannattavampaa kuin alkuperäisessä valinnassa pysyminen.

4.3 Historiaa ja variaatioita

Monty Hallin ongelma on saanut nimensä televisiojuontaja Monty Hallin mukaan. Monty Hallin osittain kehittämä ja juontama 1960-luvulla enisesityksensä saanut televisioshow Let's Make a Deal pohjautuu löyhästi Monty Hallin ongelmaan. Kyseistä televisioshowta esitetään Yhdysvalloissa vielä tänä päivänäkin.

Bertrantin laatikkoparadoksi (Bertrant's box paradox) vuodelta 1889 on matemaattisesti ajateltuna täysin samanlainen kuin Monty Hallin ongelma. Myös niin kutsuttu kolmen vangin ongelma, joka niin ikään on todennäköisyyslaskennan paradoksi, on matemaattisesti ajateltuna täysin sama ongelma kuin Monty Hallin ongelma.

Monty Hallin ongelmasta on myös olemassa variaatioita, joissa visailussa käytetään useampia ovia. Useampien ovien tapauksissa pelaaja valitsee edelleen yhden oven, jonka jälkeen juontaja avaa jäljellä olevista ovista kaikki paitsi kaksi. Useampien ovien tapauksissakin aluperäisen ovivalinnan vaihtaminen on kannattavampaa kuin alkuperäisessä valinnassa pysyminen.

Luku 5

Bertrandin paradoksi

5.1 Esittely

Bertrandin paradoksissa ajatellaan tasasivuinen kolmio, joka piirretään ympyrän sisälle siten, että kolmion kärjet ovat ympyrän kehällä. Valitaan sattumanvaraisesti jokin ympyrän jänne. Mikä on todennäköisyys sille, että valittu jänne on pidempi kuin ympyrän sisälle ajatellun tasasivuisen kolmion sivu?

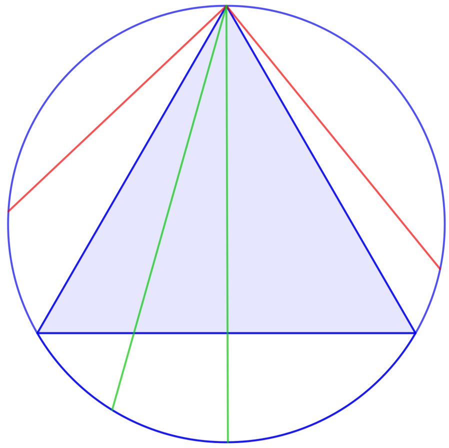
Tilanteesta tekee paradoksin se, että jänne voidaan valita usealla eri tavalla ts. ongelman esityksessä ei määritellä tarkasti, miten jänne tulisi valita. Valitsemistapa vaikuttaa täten olennaisesti paradoksin ratkaisuun.

5.2 Ratkaisut

Merkitään tapausta, jossa jänne on pidempi kuin ympyrän sisään ajatellun kolmion sivunpituus, A:lla. Tapahtuma A on siis ns. suotuisa tapaus. Merkitään ympyrän sädettä r:llä.

Ratkaisu 1. Kiinnitetään jänteen toinen päätepiste ympyrän kehälle ja valitaan vastaavasti jänteen toinen päätepiste sattumanvaraisesti ympyrän kehältä. Ympyrän kehän pituus toimii tarkasteltavana koko kuvion geometrisena mittana $\ell = 2\pi r$. Suotuisissa tapauksissa toinen päätepiste on ympyrän kaarella. Kaaren pituus saadaan kaavasta $\ell(A) = \frac{2}{3}\pi r$. Täten saadaan geometriseksi todennäköisyydeksi

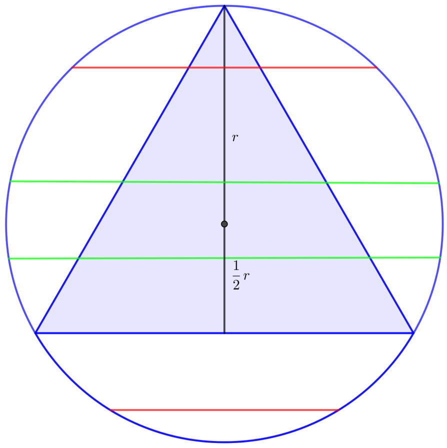
$$P(A) = \frac{\ell(A)}{\ell} = \frac{\frac{2}{3}\cancel{\pi r}}{2\cancel{\pi r}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2^{(2}}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33.$$



Kuva 5.1: Kaksi keskimmäistä jännettä ovat suotuisia tapauksia (vihreä väri) ja kaksi reunimmaista epäsuotuisia (punainen väri).

Ratkaisu 2. Valitaan sattumanvaraisesti ympyrän keskipisteen ja jänteen keskipisteen etäisyys väliltä $[0, r]$. Geometrisena mittana toimii tässä tapauksessa mitta $\ell = r$. Suotuisaan tapaukseen päädytään tilanteessa, jossa ympyrän keskipisteen ja jänteen keskipisteen välinen etäisyys on pienempi kuin puolet ympyrän säteestä eli pienempi kuin $\frac{1}{2}r$. Suotuisten tapausten geometrinen mitta on täten $\ell(A) = \frac{1}{2}r$. Täten suotuisten tapausten geometriseksi todennäköisyydeksi saadaan

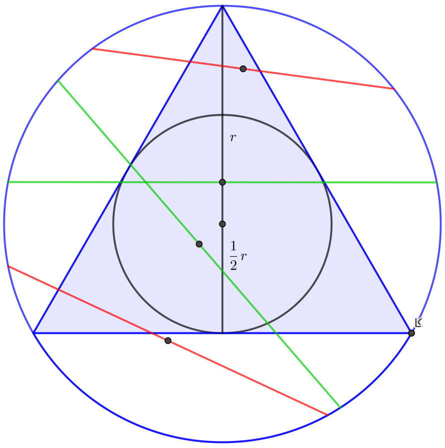
$$P(A) = \frac{\ell(A)}{\ell} = \frac{\frac{1}{2}\cancel{r}}{\cancel{r}} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$



Kuva 5.2: Kaksi keskimmäistä jännettä (vihreä väri) ovat suotuisia tapauksia. Ylin ja alin jänne (punainen väri) ovat epäsuotuisia tapauksia.

Ratkaisu 3. Valitaan jänteen keskipiste sattumanvaraisesti ympyrän sisäpuolelta. Tällöin valittava piste on jossain kiekon $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq r^2\}$ sisäpuolella. Koko ympyrän geometrisenä mittana toimii näin ollen kyseisen r-säteisen kiekon pinta-ala eli $\ell = \pi r^2$. Suotuisien tapahtumien keskipisteet sijoittuvat kiekolle $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq (\frac{r}{2})^2\}$. Kyseisen kiekon pinta-ala on $\ell(A) = \pi(\frac{r}{2})^2 = \pi\frac{r^2}{4} = \frac{1}{4}\pi r^2$. Täten suotuisten tapausten geometriseksi todennäköisyydeksi saadaan

$$P(A) = \frac{\ell(A)}{\ell} = \frac{\frac{1}{4}\cancel{\pi r^2}}{\cancel{\pi r^2}} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$



Kuva 5.3: Kaksi keskimmäistä jännettä (vihreä väri) ovat suotuisia tapauksia ja kaksi reunimmaista jännettä ovat epäsuotuisia (punainen väri). Kuvassa esitettynä myös jänteiden keskipisteet.

5.3 Historiaa

Ranskalainen matemattikko Joseph Louis François Bertrand (1822-1900) esitteli hänen mukaansa myöhemmin nimetyn paradoksin vuonna 1889 teoksessaan Calcul des probabilités. Kyseisessä teoksessa Berntrand esittelee myös muita todennäköisyyslaskenna pulmia.

Paradoksille on kehitelty useita erilaisia ratkaisutapaoja tässä tutkielmassa esiteltyjen ratkaisujen lisäksi.

Luku 6

Syntymäpäiväparadoksi

6.1 Esittely

Syntymäpäiväparadoksissa tutkitaan yleisesti sitä, kuinka todennäköistä on, että kahdella tai useammalla henkilöllä on sama syntymäpäivä tietyn kokoisessa ryhmässä. Intuitiivisesti ajateltuna tuntuisi siltä, että on huomattavasti todennäköisempää, että ryhmässä kellään, kahdella tai useammalla, ei ole samaa syntymäpäivää. Todennäköisyyslaskennan nojalla kuitenkin huomataan, että ryhmän ei tarvitse olla kovinkaan suuri, että kahden tai useamman henkilön sama syntymäpäivä on jo todennäköisempi kuin, että kaikilla olisi eri syntymäpäivä. Intuitiivisen ajattelun ja todennäköisyyslaskennan ristiriita tekeekin tilanteesta paradoksin.

6.2 Ratkaisu

Merkitään A:lla suotuisaa tapausta, eli tapausta jossa ryhmässä kahdella tai useammalla on sama syntymäpäivä. Merkitään B:llä tapahtumaa, jossa kaikilla ryhmän jäsenillä on eri syntymäpäivä. Tapahtuma B on tapahtuman A vastatapahtuma eli komplementti. Tapahtuman A todennäköisyys saadaan siis kaavasta

$$P(A) = 1 - P(B).$$

Seuraavaksi käydään läpi, kuinka tapahtuman A komplementin B todennäköisyys lasketaan. Mainittakoon, että ratkaisua on mielekästä tutkia minimissään kahden hengen ryhmillä ja maksimissaan 365 henkilön ryhmillä. Tämä johtuu siitä, että yli 365 henkilön ryhmissä joka tapauksessa 2 henkilöä on syntynyt samana päivänä ja yksi henkilö ei varsinaisesti muodosta ryhmää eikä hänen ole myöskään mahdollista syntyä samana päivänä muuta kuin itsensä kanssa.

Ryhmän ensimmäisen tarkasteltavan henkilön syntymäpäivä voi olla mikä tahansa päivä vuodesta eli mikä tahansa vuoden 365 päivästä (jos karkausvuotta ei huomioida). Seuraavan tarkasteltavan jäsenen tulee olla syntynyt jollakin muulla päivällä kuin edellinen eli jollakin päivällä 364:stä ja seuraavalla 363 ja niin edelleen.

Esimerkiksi 5 henkilön ryhmän komplementin todennäköisyys voidaan laskea seuraavasti

$$P(B_5) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \frac{361}{365} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot 361}{365^5} = 0{,}9728...$$

Tästä saamme edelleen suotuisan tapauksen A todennäköisyyden viiden hengen ryhmän tapauksessa

$$P(A_5) = 1 - P(B_5) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot 361}{365^5} = 1 - 0{,}9728... = 0{,}0271... \approx 0{,}027.$$

Taulukoidaan tuloksia erikokoisilla ryhmillä.

Ryhmäkoko	Suotuisan tapauksen A todennäköisyys
5	$P(A_5) = 1 - P(B_5) = 1 - \frac{365\cdot364\cdot363\cdot362\cdot361}{365^5} = 0{,}0271... \approx 0{,}027$
10	$P(A_{10}) = 1 - P(B_{10}) = 1 - \frac{365\cdot364\cdot363\cdot\ldots\cdot356}{365^{10}} = 0{,}1169... \approx 0{,}117$
15	$P(A_{15}) = 1 - P(B_{15}) = 1 - \frac{365\cdot364\cdot363\cdot\ldots\cdot351}{365^{15}} = 0{,}2529... \approx 0{,}253$
20	$P(A_{20}) = 1 - P(B_{20}) = 1 - \frac{365\cdot364\cdot363\cdot\ldots\cdot346}{365^{20}} = 0{,}4114... \approx 0{,}411$
22	$P(A_{22}) = 1 - P(B_{22}) = 1 - \frac{365\cdot364\cdot363\cdot\ldots\cdot344}{365^{22}} = 0{,}47856... \approx 0{,}476$
23	$P(A_{23}) = 1 - P(B_{23}) = 1 - \frac{365\cdot364\cdot363\cdot\ldots\cdot343}{365^{23}} = 0{,}5072... \approx 0{,}507$
100	$P(A_{100}) = 1 - P(B_{100}) = 1 - \frac{365\cdot364\cdot363\cdot\ldots\cdot265}{365^{100}} = 0{,}9999... \approx 1$
200	$P(A_{200}) = 1 - P(B_{200}) = 1 - \frac{365\cdot364\cdot363\cdot\ldots\cdot165}{365^{200}} = 0{,}9999... \approx 1$
300	$P(A_{300}) = 1 - P(B_{300}) = 1 - \frac{365\cdot364\cdot363\cdot\ldots\cdot65}{365^{300}} = 0{,}9999... \approx 1$
365	$P(A_{365}) = 1 - P(B_{365}) = 1 - \frac{365\cdot364\cdot363\cdot\ldots\cdot1}{365^{365}} = 0{,}9999... \approx 1$

Taulukko 6.1: Suotuisien tapausten todennäköisyydet eri ryhmäkoilla syntymäpäiväparadoksissa.

Taulukon perusteella voidaan todeta, että jo 23 henkilön ryhmässä on itse asiassa todennäköisempää, että kahdella henkilöllä on sama syntymäpäivä. Sadan henkilön ryhmän kohdalla on jo melkeimpä varmaa, että ryhmään kuuluu kaksi henkilöä, joilla on sama syntymäpäivä.

6.3 Historiaa

Syntymäpäiväparadoksin historia on kohtalaisen epäselvä. Ei ole olemassa yksikäsitteistä tietoa siitä, kuka paradoksin kehitti. Itävaltalaisen Richard von Misesin (1883-1953) tiedetään kehittäneen paradoksin tunnetuimman esityksen. Syntymäpäiväparadoksi tunnetaan myös nimellä syntymäpäiväongelma.

Luku 7

Pietarin paradoksi

7.1 Esittely

Pietarin paradoksista tunnetaan useita eri versioita, tässä luvussa esittelen niistä kaksi. Esitys 1 on paradoksin tunnetuin versio ja esitys 2 on sen sijaan paradoksin huomattavasti tuntemattomampi versio, joka esitetään Pekka Tuomisen ja Pekka Norlamon kirjassa Todennäköisyyslaskenta (1988).

Esitys 1. Ajatellaan uhkapeli, jossa pelivälineenä toimii harhaton kolikko. Kolikossa on kaksi puolta: kruuna ja klaava. Peli toimii siten, että pelaaja asettaa ensin alkupanokseksi 2 euroa, jonka jälkeen heitetään kolikkoa. Mikäli heiton tulos ensimmäisellä heittokierroksella on klaava, voittaa pelaaja oman panoksensa tuplana takaisin (eli saa takaisin 4 euroa). Mikäli tulos taas on kruuna, häviää pelaaja panoksensa ja tuplaa panoksensa 4 euroon pelin toiselle kierrokselle. Mikäli tulos on tällöin klaava, saa pelaaja takaisin toisen kierroksen panoksensa tuplana (8 euroa). Tuloksen taas ollessa kruuna, pelaaja häviää panoksensa ja tuplaa panoksensa 8 euroon kolmannelle kierrokselle. Yleisesti siis pelaaja voittaa klaavan tullessa 2^n verran rahaa, jossa n kuvaa kierroksen numeroa (n on siis kokonaisluku ja $n > 0$). Kruunan tulleessa pelaaja häviää aina panoksensa verran rahaa ja tuplaa edellisen panoksensa seuraavalle kierrokselle. Pelaaja siis saa kierroksesta riippuen klaavan tullessa rahaa ($4, 8, 16, 32, 64, ...$ euroa) ja jää voitolle kierrosta kohden ($2, 4, 8, 16, 32, ...$ euroa).

Yksittäisen harhattoman kolikon heitossa mahdolliset alkeistapaukset ovat joko kruuna tai klaava, eli perusjoukon Ω alkioiden lukumäärä $n(\Omega) = 2$ ja koska pelaajan kannalta suotuisa tapaus on vain klaava (merk. A) niin suotuisten tapausten määrä on $n(A) = 1$.

Tällöin todennäköisyys heittää klaava on

$$P(\text{"Heitto on klaava"}) = P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2},$$

ja vastaavasti todennäköisyys heittää kruuna saadaan helposti komplementin todennäköisyytenä

$$P(\text{"Heitto on kruuna"}) = P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Kun kolikkoa heitetään monta kertaa, ovat yksittäiset heittokierrokset toisistaan riippumattomia. Tämä tarkoittaa sitä, että todennäkööisyys heittää esim. kolme peräkkäistä klaavaa on

$$P(\text{"3 peräkkäistä klaavaa"}) = (P(A))^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

ja edelleen heittää n peräkkäistä klaavaa

$$P(\text{"}n\text{ peräkkäistä klaavaa"}) = (P(A))^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

Kun asetetaan piestetodennäköisyysfunktioksi $f_i(x) = \frac{1}{2^x}$ ja $x_i = 2^x$, niin diskreetin satunnaisuuttujan odotusarvon määritelmän mukaan saadaan esitetyn uhkapelin odotusarvoksi

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + ... = \infty.$$

Odotusarvoa mukaillen voitaisiin päätellä, että uhkapelistä voi voittaa äärettömän määrän rahaa, ja että siihen kannattaisi sijoittaa ääretön summa rahaa. Tämä ei kuitenkaan pidä välttämättä paikkaansa, sillä uhkapeleihin asetetaan juuri tämän takia panoskattoja, joilla kontrolloidaan pelaajan mahdollisuutta voittaaa.

Esitys 2. Eräässä peliluolassa pelataan seuraavin säännöin:

- Pelaaja saa luolan pitäjältä s euroa.
- Pelaaja heittää (harhatonta) kolikkoa. Jos tulee kruuna, peli päättyy, pelaaja maksaa takaisin yhden euron ja saa pitää loput. Jos taas tulee klaava, niin pelaajan on jatkettava kolikkoa heittämällä kunnes tulee ensimmäinen kruuna.
- Jos ensimmäinen kruuna tulee n. kerralla, niin peli päättyy ja pelaaja maksaa luolan pitäjälle 2^{n-1} euroa.

Olkoon X pelaajan voittoa kuvaava satunnaismuuttuja. Toteamme, että peli olisi reilu, jos $E(X) = 0$. Nyt

$$P(X = s - 2^{n-1}) = P(1.\ \text{kruuna}\ \ n.\ \text{heitolla}) = P(\underbrace{kl, kl, ..., kl}_{\text{n-1}}, kr) = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n},$$

joten

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot P(X = x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (s - 2^{n-1}) P(X = s - 2^{n-1}) \\ &= \sum_{n-1}^{\infty} (s - 2^{n-1}) \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{s}{2^n} - \frac{1}{2}\right) = -\infty. \end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa sitä, että odotusarvoa $E(X)$ ei siis ole olemassa. Näin ollen äskeisen tarkastelun mukaan peli on ns. ”keskimääräisessä mielessä” pelaajalle äärettömän tappiollinen ja luolan pitäjälle äärettömän voitollinen.

7.2 Ratkaisut

Paradoksin esityksissä 1 ja 2 päädyttiin siis varsin mielenkiintoisiin asetelmiin. Toisessa päädyttiin äärettömän voitolliseen tilanteeseen ja toisessa äärettömän tappiolliseen tilanteeseen pelaajan kannalta. Seuraavaksi tutkitaan tilanteita hieman toisella tavalla. Emme nojaakaan odotusarvoon, vaan esityksessä 1 tutkimme sitä, kuinka paljon pelaajan kannattaisi sijoittaa osallistumisesta peliin, jotta pelaaminen olisi kannattavaa. Esityksen 2 ratkaisussa tutkimme sitä, mikä tulee s:n olla, jotta peli olisi pelaajan kannalta reilu. Esityksen 1 ratkaisutapa on lainattu matematiikkalehti Solmun numerosta 3/2010 ja esityksen 2 ratkaisutapa esitetään Tuomisen ja Norlamon kirjassa Todennäköisyyslaskenta.

Esitys 1. Tutkitaan, kuinka todennäköistä on saada tietyn pituinen heittosarja, kun pelataan mielivaltainen määrä kierroksia. Todennäköisyys saada yli v:n heiton kierros on

$$P(\text{”saada yli } v\text{:n heiton kierros”}) = \lim_{K \to \infty} \sum_{i=v+1}^{K} \left(\frac{1}{2^i}\right) = \left(\frac{1}{2^{v+1}}\right) / \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^v}.$$

Komplementin todennäköisyytenä saadaan todennäköisyys sille, milloin ei saada yli v:n heiton kierroksia (merkitään tätä todennäköisyyttä kirjaimella P)

$$P(\text{”ei saada yli } v\text{:n heiton kierroksia”}) = P = \left(1 - \frac{1}{2^v}\right)^n.$$

Edelleen lasketaan, mikä on todennäköisyydellä P pisin heittosarja, kun tiedetään pelikierrosten lukumäärä n. Ratkaistaan siis v edellisestä lausekkeesta:

$$P = \left(1 - \frac{1}{2^v}\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{P} = 1 - \frac{1}{2^v} \Rightarrow -\frac{1}{2^v} = \sqrt[n]{P} - 1 \Rightarrow \frac{1}{2^v} = 1 - \sqrt[n]{P}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{1}{2^v} = \ln(1 - \sqrt[n]{P}) \Rightarrow v \cdot \ln \frac{1}{2} = \ln(1 - \sqrt[n]{P})$$

$$\Rightarrow v = \frac{\ln(1 - \sqrt[n]{P})}{\ln \frac{1}{2}}.$$

Kun asetetaan $P = 0{,}95$ ja sijoitetaan n:n tilalle eri pelikierrosten lukumääriä, saadaan pisin heittosarja v todennäköisyydellä $P = 0{,}95$. Saamme tulokseksi seuraavanlaisen taulukon.

Pelikierrokset n	Pisin heittosaraja v todennäköisyydellä $P = 0{,}95$
10	$v = \frac{\ln(1-\sqrt[10]{0{,}95})}{\ln \frac{1}{2}} = 7{,}6107... \approx 7{,}61$
10^2	$v = \frac{\ln(1-\sqrt[10^2]{0{,}95})}{\ln \frac{1}{2}} = 10{,}9293... \approx 10{,}93$
10^3	$v = \frac{\ln(1-\sqrt[10^3]{0{,}95})}{\ln \frac{1}{2}} = 14,2509... \approx 14{,}25$
10^4	$v = \frac{\ln(1-\sqrt[10^4]{0{,}95})}{\ln \frac{1}{2}} = 17{,}5728... \approx 17{,}57$
10^5	$v = \frac{\ln(1-\sqrt[10^5]{0{,}95})}{\ln \frac{1}{2}} = 20{,}8947... \approx 20{,}89$
10^6	$v = \frac{\ln(1-\sqrt[10^6]{0{,}95})}{\ln \frac{1}{2}} = 24{,}2166... \approx 24{,}22$
10^7	$v = \frac{\ln(1-\sqrt[10^7]{0{,}95})}{\ln \frac{1}{2}} = 27{,}5385... \approx 27{,}54$
10^8	$v = \frac{\ln(1-\sqrt[10^8]{0{,}95})}{\ln \frac{1}{2}} = 30{,}8605... \approx 30{,}86$
10^9	$v = \frac{\ln(1-\sqrt[10^9]{0{,}95})}{\ln \frac{1}{2}} = 34{,}1825... \approx 34{,}18$

Taulukko 7.1: Pietarin paradoksin pisimmät heittosarjat eri kierrosmäärillä todennäköisyydellä $P = 0{,}95$.

Nyt voimme todeta, että esimerkiksi miljoonan (10^6) heittokierroksen jälkeen jäädään asetetulla todennäköisyydellä $P = 0{,}95$ alle 24,22 kierroksen (luku taulukossa on pyöristetty ylöspäin). Näin ollen miljoonan kierroksen voittosumma on alle $2^{24,22}$ euroa, eli $\frac{2^{24,22}}{10^6} = 19{,}5409... \approx 19{,}54$ euroa kierrosta kohti. Tämä tarkoittaa sitä, että asetetulla todennäköisyydellä $P = 0{,}95$ ei ole kannattavaa sijoittaa saatua 19,54 euroa enempää rahaa kierrosta kohti, ts. jos sijoittaa tätä enemmän, jää siis tappiolle todennäköisyydellä $P = 0{,}95$.

Voidaan siis todeta, että uhkapeli ei olekaan pelaajalle niin voitollinen kuin odotusarvo antaa ymmärtää. Uhkapelistä on toki mahdollista voittaa suuria summia rahaa, mutta se on varsin epätodennäköistä ja saattaa lisäksi viedä hyvin paljon aikaa.

Esitys 2. Muutetaan pelin sääntöjä, jotta pelistä tulisi pelaajalle reilumpi. Asetetaan esimerkiksi 10000 euroa maksimisummaksi, jonka pelaaja joutuu maksamaan takaisin luolanpitäjälle. Nyt $2^{13} < 10000 < 2^{14}$ (säännöt ovat kuten aiemmin esitetty, kun $n < 15$), jos 14 ensimmäisellä kerralla tulee ainoastaan klaavoja, niin peli päättyy ja pelaajan täytyy maksaa luolanpitäjälle 10000 euroa. Näillä säännöillä pelin voidaan todeta olevan reilu, kun

$$E(X) = \sum_{n=1}^{14}(s - 2^{n-1})\frac{1}{2^n} + \sum_{n=15}^{\infty}(s - 10000)\frac{1}{2^n}$$

$$= s\left(1 - \frac{1}{2^{14}}\right) - 7 + (s - 10000)\frac{1}{2^{14}} = s - 7 - \frac{10000}{2^{14}} = 0$$

$$\Leftrightarrow s = 7 + \frac{10000}{2^{14}} = 7{,}61035... \approx 7{,}61.$$

Todetaan siis, että mikäli luolanpitäjä antaa pelaajalle vähintään 7,61 euroa, pelaajan olisi kannattavaa pelata peliä. Kuitenkin voidaan todeta, että tällöin pelaaja jäisi tappiolle jo klaavan tullessa neljännellä heittokierroksella, kun hänen tulisi maksaa luolanpitäjälle $2^{4-1} = 2^3 = 8$ euroa.

7.3 Historiaa

Sveitsiläinen matemaatikko Nicolaus I Bernoulli (1687-1759) kehitti Pietarin paradoksin. Tiettävästi ensimmäistä kertaa paradoksi esitettiin 9. syyskuuta 1713, jolloin Bernoulli lähetti kirjeenä paradoksin ranskalaiselle matemaatikolle Pierre Rémond de Montmortille (1678-1719).

Daniel Bernoulli (1700-1782) kehitti tiettävästi ensimmäisen ratkaisun Pietarin paradoksille vuonna 1738, joka julkaistiin kokoelmassa Commentaries of the Imperial Academy of Science of Saint Petersburg. Paradoksi sai nimensä juuri tämän julkaisun yhteydessä ja nimi pohjautuu ilmeisesti siihen, että Daniel Bernoulli työskenteli vuosina 1724-1733 professorina Pietarin tiedeakatemiassa. Daniel Bernoullin ratkaisu perustui odotetun hyödyn hypoteesiin. Sveitsiläinen matemaatikko Gabriel Cramer oli kymmenen vuotta ennen Daniel Bernoullia päässyt hyvin lähelle tämän ratkaisua.

Paradoksia ovat vuosien saatossa tutkineet mm. Santa Fe Instituutin professori Ole Peters sekä taloustieteen nobelisti Paul Samuelson.

Luku 8

Todennäköisyyslaskennan paradoksit matematiikan opetuksessa

8.1 Peruskoulun 7.-9.-luokat

Todennäköisyyslaskennan paradoksit eivät välttämättä ole kaikkein sopivin aihe käsiteltä peruskoulussa, sillä verrattain harvan oppilaan taitotaso riittää paradoksien syvälliseen hahmottamiseen. Esittelemistäni paradokseista kentien Monty Hallin ongelma olisi kaikista sopivin käsiteltäväksi yläkouluun, sillä matematiikka kyseisen paradoksin ympärillä ei ole yläkouluun liian vaativaa. Muut kolme paradoksia sen sijaan jäävät matematiikan osalta hieman turhan haastaviksi, mutta sopivat ehkäpä yleiseen tarkasteluun matematiikan oppitunneille. Kyseiset kolme paradoksia voitaisiin käydä läpi oppitunneilla vain pintapuolin esimerkiksi aluksi kyselemällä oppilailta, mikä on heidän intuitiviinen olettamuksensa kyseisistä ongelmista ja tämän jälkeen kertoa perustellen, mitä todennäköisyydet sanovat asiasta.

8.1.1 Peruskoulun opetussuunnitelma

Peruskoulun opetussuunitelman 2014 keskeiset sisällöt todennäköisyyslaskennan osalta (suorat lainaukset):

- Tietojen käsittely ja tilastot sekä todennäköisyys: Syvennetään oppilaiden taitoja kerätä, jäsentää ja analysoida tietoa. Varmistetaan keskiarvon ja tyyppiarvon ymmärtäminen. Harjoitellaan määrittämään frekvenssi, suhteellinen frekvenssi ja mediaani. Tutustutaan hajonnan käsitteeseen. Tulkitaan ja tuotetaan erilaisia diagrammeja. Lasketaan todennäköisyyksiä.

Todennäköisyyslaskennan paradoksit soveltuvat hyvin tukemaan tiedon jäsentämistä ja analysointia sekä tarjoavat mahdollisuuden laskea todennäköisyyksiä. Jotkin paradoksit sisältävät myös suhteellisen frekvenssin laskentaa.

Todennäköisyyslaskennan paradoksit tukevat mielestäni seuraavia peruskoulun opetussuunnitelman tavoitteita (suorat lainaukset):

- Ohjata oppilasta arvioimaan ja kehittämään matemaattisia ratkaisujaan sekä tarkastelemaan kriittisesti tuloksen mielekkyyttä
- Ohjata oppilasta kehittämään tiedonhallinta- ja analysointitaitojaan sekä opastaa tiedon kriittiseen tarkasteluun
- Ohjata oppilasta määrittämään tilastollisia tunnuslukuja ja laskemaan todennäköisyyksiä
- Ohjata oppilasta kehittämään algoritmista ajatteluaan sekä taitojaan soveltaa matematiikkaa ja ohjelmointia ongelmien ratkaisemiseen.

Ensimmäinen ja toinen tavoite toteutuvat todennäköisyyslaskennan paradoksien tapauksessa mielestäni varsin hyvin. Todennäköisyyslaskennan paradoksit tarjoavat oivan lähtökohdan matemattiiselle ajattelulle, jossa tulee ongelman ratkaisemisen lisäksi arvioida ratkaisun mielekkyyttä. Paradoksit kehittävät paitsi ratkaisun, myös alkutilanteen mielekkyyden arviointia ja kyseenalaistamista. Myös paradoksien mahdolliset useat ratkaisutavat auttavat ymmärtämään ratkaisemisprosessia ja osoittavat, että matematiikassa ratkaisuun voidaan monesti päätyä useilla eri tavoilla.

Kahden viimeisen tavoitteen näkökulmasta todennäköisyyslaskennan paradoksit tukevat oppilasta laskemaan todennäköisyyksiä. Monty Hallin ongelma sisältää juuri sopivantasoista todennäköisyyslaskentaa yläkouluikäisille. Todennäköisyyslaskenta itsessään jo kehittää algorimista ajattelua varsinkin, jos laskentaan liittää jonkin ohjelmointialustan, jonka avulla voidaan esimerkiksi simuloida suotuisia tapauksia tai laskea todennäköisyyksiä eri arvoilla.

8.2 Lukio

Lukion matematiikkaan todennäköisyyslaskennan paradoksit soveltuvat jo varsin hyvin. Tosin soveltuvuutta voidaan arvioida hieman eri tavalla pitkän ja lyhyen matematiikan tapauksissa. Pitkässä matematiikassa todennäköisyyslaskenta on kahdeksas kurssi kymmenestä eli MAA8 Tilastot ja todennäköisyys. Kurssi on pitkän matematiikan pakollinen kurssi.

Myös lyhyessä matematiikassa on pakollinen todennäköisyyslaskennan kurssi MAB5 Tilastot ja todennäköisyys, joka on viides kurssi kuudesta. Todennäköisyyslaskennan paradoksit eivät juurikaan tue kyseisen kurssin sisältöjä ja tavoitteita muuten kuin todennäköisyyden käsitteen ymmärtämisen ja todennäköisyyslaskennan perusteiden osalta. Lyhyessä matematiikassa on myös tarjolla valtakunnallinen syventävä kurssi MAB9 Tilastolliset ja todennäköisyysjakaumat, jonka tarkasteleminen on tämän tutkielman näkökulmasta mielekkäämpää.

Voidaan kuitenkin todeta, että matematiikan osalta todennäköisyyslaskennan paradoksit ovat paremmin ymmärrettävissä kuin peruskoulussa. Paradoksien matematiikka ja ratkaisut tukevat myös kohtalaisen hyvin lukion vuoden 2019 opetussuunnitelman sisältöjä ja tavoitteita.

8.2.1 Pitkän matematiikan opetussuunnitelma

Seuraavaksi tarkastellaan pitkän matematiikan kurssin MAA8 Tilastot ja todennäköisyys keskeisiä sisältöjä ja tavoitteita lukion vuoden 2019 opetussuunnitelmassa. Alla esitellään sisällöt ja tavoitteet, joita mielestäni todennäköisyyslaskennan paradoksit tukevat. Kyseiset sisällöt ja tavoitteet on lainattu suoraan opetussuunnitelmasta.

Keskeiset sisällöt:

- klassinen ja tilastollinen todennäköisyys
- todennäköisyyden laskusäännöt
- diskreetin jakauman odotusarvo

Tässä tutkielmassa esitellyistä paradokseista jokainen sisältää todennäköisyyslaskentaa ja täten todennäköisyyslaskennan laskusääntöjä. Monty Hallin ongelmaan esitetään sekä klassisen todennäköisyyden ratkaisu että tilastotieteellinen Bayesin kaavaan perustuva ratkaisu. Monty Hallin ongelman taustalla oleva matematiikka ei ole kovinkaan vaativaa lukio-opiskelijalle, mutta tarjoaa erittäin hyvän mahdollisuuden tutustua erilaisiin ratkaisuihin todennäköisyyslaskennassa. Pietarin paradoksissa lasketaan odotusarvoja, ja se luonnollisesti tukee näin diskreetin jakauman odotusarvon sisällön oppimista.

Tavoitteet:

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- perehtyy todennäköisyyden käsitteeseen ja laskusääntöihin

- ymmärtää diskreetin todennäköisyysjakauman käsitteen ja oppii määrittämään jakauman odotusarvon ja tulkitsemaan sitä
- osaa käyttää ohjelmistoja digitaalisessa muodossa olevan datan hakemisessa, käsittelyssä ja tutkimisessa sekä tilastollisen tiedon esittämisessä
- osaa hyödyntää ohjelmistoja jakaumien havainnollistamisessa, tunnuslukujen määrittämisessä sekä todennäköisyyksien laskemisessa.

Todennäköisyyslaskennan paradoksit ovat omiaan syventämään lukio-opiskelijoiden ymmärrystä todennäköisyyslaskennan käsitteiden ja laskusääntöjen osalta, sillä paradoksien ratkaisut perustuvat juuri todennäköisyyslaskentaan. Odotusarvon tulkinta sisältyy olennaisesti Pietarin paradoksiin. Lähes kaikkia paradokseja voidaan myös mallintaa joillakin matematiikkaohjelmistoilla. Paradoksien ratkaisuissa käytetään myös usein taulukoita, joita voi muodostaa esimerkiksi taulukkolaskentaohjelmalla, mikä tukee opiskelijan digitaalisten ohjelmistojen käytön oppimista. Taulukot tukevat myös tilastollisen tiedon esittämisessä.

8.2.2 Lyhyen matematiikan opetussuunnitelma

Seuraavaksi tarkastellaan lukion lyhyen matematiikan valinnaisen kurssin MAB9 Tilastolliset ja todennäköisyysjakaumat keskeisiä sisältöjä ja tavoitteita. Keskeiset sisällöt ja tavoitteet on lainattu suoraan vuoden 2019 lukion opetussunnitelmasta. Lyhyen matematiikan tavoitteet eroavat pitkän matematiikan tavoitteista siten, että ohjelmistojen käyttöä painotetaan enemmän.

Tavoitteet:

- vahvistaa ja monipuolistaa tilastojen käsittely- ja tutkimustaitojaan ohjelmistojen avulla
- tietää, kuinka lasketaan tilastollisiin jakaumiin liittyviä tunnuslukuja ja todennäköisyyksiä, ja osaa määrittää ne ohjelmistojen avulla
- luottamusvälin ja virhemarginaalin käsite

Kaikkia tässä tutkielmassa esiteltyjä todennäköisyyslaskennan paradokseja voidaan käsitellä erilaisilla tietokoneohjelmistoilla. Bertrandin paradoksia voi tarkastella esimerkiksi piirtämällä piirto-ohjelmalla kuvia tapauksista ja laskea matematiikkaohjelmalla paradoksiin liittyvät todennäköisyydet. Paradoksit sopivat myös esimerkiksi taulukkolaskennan harjoitteluun. Pietarin paradoksissa sivutaan luottamusvälin ja virhemarginaalin käsitteitä, kun vastauksia taulukoidaan todennäköisyydellä 0,95.

Keskeiset sisällöt:

- normaalijakauma ja jakauman normittamisen käsitteet (odotusarvo ja keskihajonta)
- toistokoe
- binomijakauma
- luottamusvälin ja virhemarginaalin käsite

Keskeisiin sisältöihin paradokseista parhaiten liittyy Pietarin paradoksi, jossa lasketaan odotusarvoja sekä sivutaan luottamusvälin ja virhemarginaalin käsitteitä. Muut tässä tutkielmassa esitetyt paradoksit eivät juurikaan liity kurssin keskeisiin sisältöihin.

8.3 Todennäköisyyslaskennan opettaminen ja oppiminen aiheeseen liittyvien tieteellisten julkaisujen perusteella

8.3.1 Tieteellisten julkaisujen havainnot ja näkökulmat

Englantilainen Tony Gardiner kertoo kirjassaan Teaching Mathematics at Secondary Level (2016) matematiikan opettamisesta yläkoulussa. Kirjassaan Gardiner käy todella laajasti läpi, miten matematiikkaa tulisi yläasteella opettaa. Hän jakaa kirjassaan matematiikan opetuksen neljään eri tasoon ja kerron tässä tason kolme opetuksesta, joka oli ainut taso, jossa todennäköisyyslaskenta mainittiin. Tasolle kolme kuuluvat 11-14 vuotiaat oppilaat. Kyseinen ikäluokka on hieman nuorempi kuin suomalaisen yläkoulun ikäluokka. Gardiner puhuu kirjassaan Englannin opetussuunnitelman näkökulmasta.

Gardinerin mukaan opettajan tulee aina miettiä sitä, miten tietyn asian opettaa. Tämä mietintä korostuu erityisesti todennäköisyyslaskennassa. Myös opettajien todennäköisyyslaskennan osaaminen vaikuttaa opetukseen. Englannissa opettajien ymmärrys siitä, miten opettaa todennäköisyyslaskentaa on vähemmän kehittynyttä kuin esimerkiksi geometrian tai algebran tapauksessa. Tarkkaa tietoa ei ole siitä, miksi näin on.

Yläkouluikäisen tärkeimpiin tavoitteisiin todennäköisyyslaskennan osalta kuuluu yleisesti ja myös Englannissa tieto siitä, onko jokin asia tai tulos “yhtä todennäköinen” toisen tuloksen kanssa. Muita tärkeitä sisältöjä ovat mahdollisten tapahtumien todennäköisyyksien summautuminen luvuksi yksi sekä toistokokeen ymmärtäminen. Yläkouluikäisen tuleekin Englannissa osata tutkia, kuvailla ja analysoida yksinkertaisten toistokokeiden tuloksia.

Claudia Vásques ja Ángel Alsina kertovat artikkelissaan Evaluation of Teaching and Mathematical Knowledge in Primary Teachers For The Teaching of Probability (2014) matematiikan opettajien taidoista opettaa todennäköisyyslaskentaa ja heidän tavoitteensa oli kartoittaa opettajien vahvuuksia ja heikkouksia, jotta saataisiin käsitystä siitä, millä tasolla chileläisten opettajien taitotaso todennäköisyyslaskennan osalta on. He jakoivat opettajien osaamisen neljään osaan: sisällön tuntemukseen, sisällön tuntemukseen suhteessa oppilaisiin, sisällön tuntemiseen suhteessa koulutukseen sekä opetussuunnitelman tuntemuksen ja yhteydet muihin tieteenaloihin.

Vásquesin ja Alsinan artikkelin mukaan todennäköisyyslaskennan sisällyttäminen opetussuunnitelmiin on yhä suositumpaa koko maailmassa. Heidän mukaansa syynä tähän on se, että halutaan kasvattaa oppilaiden kykyä luoda yhteyksiä matematiikan, arkielämän sekä muiden oppiaineiden välillä. Artikkelin mukaan taustalla on myös yhteiskunnan kasvava vaikutus ja vaatimukset. Nyky-yhteiskunnassa on yhä tärkeämpää ymmärtää todennäköisyyksiä. Chilessä matematiikan opettajilla on todennäköisyyslaskennan osalta melko heikot taidot, jotka johtuvat mm. siitä, että he eivät ole käyneet koulutuksessaan todennäköisyyslaskennan kursseja.

Carmen Batanero, Egan J. Chernoff, Joachim Engel, Hollylynne S. Lee, Ernesto Sánchez tiivistävät artikkelissaan Research on Teaching and Learning Probability (2016) muiden artikkeleiden ja tutkimusten havaintoja ja tuloksia. Heidän mukaansa kansalaisten on ymmärrettävä mahdollisuuksien läsnäolo arkielämässä. Ihminen kohtaa arkielämässään lukuisia tilanteita, jotka sisältävät sattumaa. Näitä tilanteita ovat niin arkielämän päätökset kuin työelämässä tehtävät päätökset. Arkielämässä sattumaa sisältää esimerkiksi äänestäminen ja työelämässä esimerkiksi lääkäreiden päätökset. Yleisesti arkielämän ja työelämän päätökset sisältävät riskien arviointia.

Bataneron ym. artikkelin mukaan monien maiden opetusviranomaiset ovat tunnistaneet todennäköisyyksien ymmärtämisen tarpeen ihmisen jokapäiväisessä elämässä ja ovat lisänneet todennäköisyyslaskentaa eri kouluaineiden opetussuunnitelmiin sekä opettajankoulutukseen. Heidän mukaansa binomi- ja normaalijakauma ovat tärkeitä työkaluja ongelmien tunnistamiseen ja ratkaisemiseen. He ovat myös sitä mieltä, että lasten riskien ymmärtämistä olisi hyvä tutkia lisää.

Bataneron ym. mukaan todennäköisyyslaskennan päättely noudattaa erilaisia sääntöjä kuin ns. klassinen matemaattinen logiikka. Todennäköisyyslaskennassa väite ei olekaan aina tosi tai epätosi niin kuin klassisessa logiikassa. Todennäköisyyslaskenta sisältää Bataneron ym. mukaan intuitiivisiä haasteita ja paradokseja. Mahdollisuus väärinymmärryksiin ja harhaluuloihin on korkea. Matematiikan muilla aloilla ei juurikaan esiinny intuitiota vastustavia tuloksia kuin edistyneempien käsitteiden yhteydessä. Todennäköisyyslaskennan merkittävä vaikutus todellisten ongelmien ratkaisemiseen oikeuttaakin sen sisällyttämisen koulun opetussuunnitelmaan.

Bataneron ym. mukaan yläkoulun ja lukion tasoisissa oppilaitoksissa on jo pitkät perinteet todennäköisyyksien opetuksessa. Yläkoululaisten pitäisi heidän mukaansa ymmärtää todennäköisyyksiin kuuluva terminologia, osata arvioida asioita todennäköisyyksiin perustuen simulaatioiden ja testaamisen avulla sekä osata laskea yksinkertaisia todennäköisyyksiä yhdistetyille tapahtumille käyttäen mm. listoja ja taulukoita. Lukioikäisen pitäisi sen sijaan ymmärtää todennäköisyysjakauman käsite, osata simuloida todennäköisyysjakaumaa, laskea satunnaismuuttujan odotusarvo yksinkertaisissa tapauksissa, ymmärtää ehdollisen todennäköisyyden ja erillisten tapahtumien käsitteet sekä ymmärtää, miten yhdistetyn tapahtuman todennäköisyys lasketaan.

Bataneron ym. mukaan todennäköisyyslaskentaa opetettaessa on tärkeää ottaa huomioon ne seikat, mitä oppilaat jo ymmärtävät todennäköisyyksistä. Ensisijaisen tärkeää on myös pohtia opetuksen sisältöjä eri koulutustasoilla.

Satunnaisuus on todennäköisyyslaskennan peruskäsite, mutta sitä ei aina määritellä kovin tarkasti esimerkiksi oppikirjoissa. Oppilaiden satunnaisuuden ymmärrystä on siis syytä vahvistaa. Tapahtumien ja otosavaruuksien opiskelussa on keskeistä tuoda oppilaille esille, että tapahtumia on useita eikä vain yksi. Riippumattomuus katsotaan myös tärkeäksi käsitteeksi. Oppilaiden tulee myös ymmärtää, että esimerkiksi satunnaiskokeen tulokset saattavat olla arvaamattomia. Lukioikäisten opiskelijoiden tulisi tunnistaa estimaatin ja todennäköisyyden ero. Simulaatioiden määrä on kasvanut viime aikoina ja simulaatioiden ymmärtäminen saattaa didaktisena työkaluna parantaa oppilaiden todennäköisyyden tuntemusta.

Opettajat tarvitsevat usein ylimääräistä aikaa todennäköisyyden opettamisen valmisteluun, mikä johtuu useista seikoista. Oppikirjoissa esitetään usein melko lyhyesti tai vain yhdestä näkökulmasta todennäköisyyden käsitteitä, mikä saattaa lisätä opettajan työtä. Todennäköisyyksien käsittely saattaa rajoittua esimerkiksi pelkästään uhkapeleihin tai olla muuten puutteellisia. Lisäksi teknologian määrä todennäköisyyslaskennassa alkaa olla hyvin keskeistä ja opettajalla saattaa mennä aikaa myös uuden ohjelmiston käytön opettelemiseen.

8.3.2 Todennäköisyyslaskennan paradoksien hyödyntäminen matematiikan opetuksessa tieteellisiin julkaisuihin perustuen

Gardinerin kirjan tavoitteiden näkökulmasta todennäköisyyslaskennan paradoksit soveltuvat kohtalaisen hyvin tukemaan todennäköisyyslaskennan tärkeimpiä tavoitteita. Tässä tutkielmassa esitetyistä todennäköisyyslaskennan paradokseista ainakin Monty Hallin ongelma ja syntymäpäiväparadoksi tukevat Gardinerin esittämiä tavoitteita. Molemmissa edellä mainituissa paradokseissa lasketaan komplementtien todennäköisyyksiä, mitkä ovat omiaan tukemaan oppilaan ajatusta siitä, että kaikkien mahdollisten tapahtumien todennäköisyyksien summa on yksi. Myös Pietarin paradoksi toiminee hyvin esimerkkinä, sillä kolikon heittosarjojen tutkiminen on hyvä esimerkki toistokokeesta.

Vásquesin ja Alsinan artikkelin kannalta todennäköisyyslaskenna paradokseilla ei ole kovin paljoa yhtäläisyyksiä. Voidaan kuitenkin mainita, että Pietarin paradoksi, Monty Hallin ongelma sekä syntymäpäiväparadoksi ovat periaatteessa kaikki jollain tasolla tosielämän tilanteita, joiden todennäköisyyksiä lasketaan. Tämä saattaisi auttaa oppilaita näkemään ja ajattelemaan yhteyksiä matematiikan ja arkielämän välillä.

Bataneron, Chernoffin, Engelin, Leen ja Sánchezin artikkelin tavoitteita ja havaintoja todennäköisyyslaskennan paradoksit tukevat melko hyvin. Monty Hallin ongelma on omiaan tukemaan oppilaan ajatusta päätöksenteosta. Monty Hallin ongelmassa on mahdollista tehdä päätös siitä, vaihtaako ovea vaiko ei. Kyseinen päätös ja sen havainnollistaminen on karkea, mutta oiva esimerkki arkielämän päätöksenteosta. Paradoksin ratkaisu todistaa myös sen, että päätöstä on syytä lähestyä todennäköisyyslaskennan kautta intuitiivisen lähestymistavan sijaan. Todennäköisyyslaskennan paradoksit osoittavat yleisesti, että väärinymmärrykset ja harhaluulot ovat aina mahdollisia todennäköisyyslaskennassa.

Todennäköisyyslaskennan paradoksit opettavat myös ratkaisuineen todennäköisyyslaskennan termistöä. Jokaista tässä tutkielmassa esitettyä todennäköisyyslaskennan paradoksia voidaan myös simuloida käyttäen esimerkiksi jotain tietokoneohjelmaa, jolloin oppilailla on myös mahdollista tutustua simulaatioon. Monty Hallin ongelman, syntymäpäiväparadoksin ja Pietarin paradoksin ratkaisuissa hyödynnetään tulosten taulukointia, mikä tukee näin ollen oppilasta laskemaan yksinkertaisia todennäköisyyksiä taulukoiden avulla. Pietarin paradoksi opettaa laskemaan odotusarvoja sekä auttaa ymmärtämään erillisiä tapahtumia (yksittäiset kolikonheitot ovat erillisiä tapahtumia).

Huomionarvoista on myös se seikka, että kaikissa edellä mainituissa tieteellisissä julkaisuissa todettiin, että todennäköisyyslaskennan opettaminen on opettajalle haastavaa. Todennäköisyyslaskennan paradoksit saattaisivat olla myös opettajan kannalta kohtalaisen helppo tapa lähestyä tiettyjä todennäköisyyslaskennan käsitteitä. Erityisesti Monty Hallin ongelma on ongelmana melko yksinkertainen, mutta sen ratkaisemiseen voidaan käyttää verrattain melko monimutkaista matematiikkaa ja eri ratkaisut tarjoavat jo melko laajan skaalan todennäköisyyslaskennan termistöä. Myös vähemmän todennäköisyyslaskennasta ymmärtävälle opettajalle Monty Hallin ongelma saattaisi olla melko helppo ymmärtää ja soveltaa opetuksessa.

Kirjallisuutta

[1] Koistinen, P. (2013). Todennäköisyyslaskenta, luentomoniste. Helsingin Yliopisto.

[2] Tuominen, P., Norlamo, P. (1988). Todennäköisyyslaskenta. 6. painos, Limes ry.

[3] Holopainen, I. (2004). Mitta ja integraali, luentomoniste. Helsingin Yliopisto.

[4] Mueser, P. R., Grandberg, D. (1999). The Monty Hall Dilemma Revisited: Understanding the Iteraction of Problem Definition and Decision Making. University of Connecticut.

[5] Koskenoja, M. (2002). Sattuman matematiikkaa I - klassinen todennäköisyys. Matematiikkalehti Solmu.

[6] Cantini, A. (2017). Paradoxes and Contemporary Logic. The Stanford Encyclopedia of Philosophy.

[7] Gardner, M. (2001). The Clossal Book of Mathematics. W.W. Norton & Co.

[8] Borja, M. C., Haigh, J. (2007). The Birthday Problem. Significance, Royal Statistical Society vol 4.

[9] Blavatskyy, P. (2005). Back to the St. Petersburg Paradox. Charles University working paper 227.

[10] Isohanni, J. (2010). Pietarin paradoksi ja tietokonesimulaatio. Matematiikkalehti Solmu.

[11] Opetushallitus. (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Helsinki.

[12] Opetushallitus. (2019). Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019. Helsinki.

[13] Gardiner, A. (2016). Teaching Mathematics at Secondary Level. Open Book Publishers.

[14] Vásquez, C., Alsina, Á. (2014). Evaluation Of Teaching And Mathematical Knowledge In Primary Teachers For The Teaching Of Probability. Procedia - Social and Behavioral Sciences 141.

[15] Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., Sánchez, E. (2016). Research on Teaching and Learning Probability. ICME-13 Topical Surveys. Springer, Cham.